11

Isometric and isomorphic transformations through geometry and its application in art

Transformaciones isométricas e isomorfas a través de la geometría y su aplicación en el arte

Mirtha Pallarés-Torres, Jing Chang Lou, M. Eugenia Pallarés- Torres
Departamento de Arquitectura - Facultad de Arquitectura y Urbanismo – U. de Chile, Chile

Abstract
There is a relationship of convergence between art and geometry that can be observed transversally in different artistic expressions produced over time by different cultures. It corresponds to a link in which the contribution of geometry through the exploration, construction and mastery of space allows the representation of reality through a dynamic process, becoming a perfect tool to critically study the structure of a work of art, as well as the implications in the design of two-dimensional and three-dimensional constructions. The study was developed through isometric and isomorphic transformations in the plane, abstract geometric concepts related to the understanding of geometric patterns with an integrative approach, becoming a teaching resource that guides the development of mathematical knowledge in a visual and innovative way, aimed at contextualizing content.

Keywords: Euclidean Geometry, isometric transformations, isomorphic transformations.

Suggested citation:
Pallarés-Torres, M., Lou, J. Ch., Pallarés-Torres, M.E. (2023). Isometric and isomorphic transformations through geometry and its application in art. In Pérez-Aldeguer, S. (Ed.), *Teaching and learning projects in Arts and Humanities*. (pp. 113-123). Madrid, España: Adaya Press. https://doi.org/10.58909/ad23502120

Resumen
Entre arte y geometría existe una relación de convergencia posible de observar transversalmente en distintas expresiones artísticas producidas en el tiempo por diversas culturas. Corresponde a una vinculación en la que el aporte de la geometría a través de la exploración, construcción y dominio del espacio permite la representación de la realidad mediante un proceso dinámico, transformándose en una herramienta perfecta para estudiar críticamente la estructura de una obra de arte, como también las implicancias en el diseño de construcciones bidimensionales y tridimensionales. El estudio se desarrolló a través de transformaciones isométricas e isomorfas en el plano, conceptos geométricos abstractos relativos a la comprensión de patrones con un enfoque integrador, transformándose en la enseñanza en un recurso didáctico que orienta el desarrollo de conocimientos matemáticos de una manera visual e innovadora, destinada a contextualizar contenidos.

Palabras clave: Geometría Euclidiana, transformaciones isométricas, Transformaciones isomorfas.

Introducción

La búsqueda para la construcción de conocimiento en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de primer año de la carrera de Arquitectura en la asignatura Geometría, nos llevó a realizar un trabajo interdisciplinario, el cual, mediante una metodología aplicada, vinculó la geometría con el arte, estableciendo una secuencia didáctica compuesta por cuatro actividades basadas en la teoría de las transformaciones de Félix Klein, que consideraron frisos, simetrías cíclicas y diedrales de Leonardo, recubrimientos en el plano y simetrías rotatorias con dilatación. Actividades que fueron exploradas y desarrolladas con el *software* de geometría dinámica *Sketchpad*, debido a su aporte en el aprendizaje mediante las representaciones físicas, mentales y visuales. Herramienta que permite la manipulación de formas, como modelos o representaciones de objetos a través de los cuales se puede explorar, relacionar y ejecutar ideas acerca del objeto (Moreno, 2002)

En cada una de las actividades propuestas se entregaron los instrumentos y las herramientas necesarias que, junto a la incorporación del *software,* permitió la autoevaluación y replanteo de las acciones por parte de los alumnos. Hay que indicar que este trabajo es una ampliación de la comunicación publicada en Libro de Actas del Congreso CIVAE 2023 y que en esta ocasión hemos querido profundizar.

El relacionar la geometría con el arte o el arte con la geometría, implica integrar apreciaciones estéticas con razonamiento, orden y regularidad, contribuyendo a la construcción del concepto isometría o igualdad de formas en el estudio de estructuras algebraicas asociadas a figuras geométricas que se caracterizan por ser simétricas.

> Se ha partido de la idea que las creaciones y representaciones artísticas realizadas mediante el empleo exclusivo de formas geométricas es un medio expresivo inherente al desarrollo cultural de la humanidad. Aceptando esta idea, se cree en la posibilidad de geometrizar, con el fin de diagnosticar las características plásticas predominantes de la obra geométrica en el arte. (Pando, 2003, p.11)

La asociación de las matemáticas con el arte se focaliza en la generación de procesos compositivos producidos a partir de relaciones geométricas observadas en diversas expresiones artísticas, que son factibles de explorar a través de las transformaciones isométricas e isomorfas, como un recurso de aprendizaje y de desarrollo de habilidades asociadas al sentido espacial, permitiendo al estudiante evidenciar la importancia de la geometría, apropiándose de habilidades como visualizar, razonar y argumentar, teniendo como medio de acercamiento el arte.

Sobre la base de esta propuesta se implementó un análisis descriptivo de diseños simétricos en objetos culturales, lo que permitió exponer y analizar la geometría y las transformaciones aplicadas en diseños de franjas y superficies, cuya clasificación es fundamental para comprender los procesos de transformación geométrica, lo que es posible de observar de manera específica en distintas culturas, las que son estudiadas desde las características comunes, permitiendo revelar posibles analogías.

Teniendo presente los tres procesos cognitivos: construcción, visualización y razonamiento que presenta el estudio de la geometría, el análisis se centró en los dos primeros, ya que la construcción además de guiar la visualización establece conexiones y propiedades matemáticas que dependen de las herramientas utilizadas (Duval, 1998).

Para realizar el proceso el *software Sketchpad* fue la herramienta mediadora que permitió relacionar la construcción de frisos de edificios públicos y rosetones en iglesias en Santiago de Chile, además de recubrimientos en el plano tomados de la obra de Escher, con las cuatro actividades propuestas y desarrolladas por los alumnos.

En este contexto el estudio analizó la estructura que presentan las simetrías en el mundo real, estableciendo a qué categoría pertenecen, siendo necesario definir las estructuras y el modo como se generan:

1.- Bandas o frisos que presentan simetrías con traslación: El friso es una banda decorativa rectangular donde se repite con regularidad un motivo en una dirección en forma ilimitada. En arquitectura el friso forma parte del entablamento de un edificio, entre el arquitrabe y la cornisa, está basada en un conjunto de figuras obtenidas mediante traslaciones sucesivas según un mismo vector aplicado a una figura inicial. El diseño establece reglas precisas, definidas por los grupos de simetrías, observándose solo una traslación, pudiendo incorporar otras isometrías como reflexiones verticales u horizontales, giros en 180° y reflexiones con deslizamientos, dando origen a 7 tipologías.

Para diseñar un friso se debe considerar el motivo base que es libre y la o las transformaciones geométricas que se aplicarán al motivo base que definirá la banda. La nomenclatura utilizada para establecer la clasificación del friso proviene de la cristalografía y consta de cuatro caracteres cuya primera letra es la **p** que indica la existencia de una traslación. El segundo carácter es la letra **m** si hay una reflexión con respecto a un eje vertical y si no hay reflexión es el número **1**. El tercer carácter es la letra **m** si hay una reflexión con respecto a un eje horizontal, es la letra **a** si es una reflexión con deslizamiento y el número **1** si no hay reflexión. Finalmente, el último carácter es el número **2** si hay una rotación en 180° y el número **1** si no hay rotación. De acuerdo con esta nomenclatura nos encontramos con las siete clases de frisos que se indican;

- El friso p111 considera solo traslaciones
- El friso p1a1 considera reflexión horizontal con deslizamiento y traslación
- El friso pm11 considera reflexión vertical y traslación
- El friso p112 considera rotación en 180°y traslación
- El friso pma2 considera reflexión vertical, reflexión con deslizamiento y traslación
- El friso p1m1 considera reflexión horizontal y traslación
- El friso pmm2 considera reflexión vertical, reflexión horizontal y traslación

La existencia de estas siete clases de frisos de debe a Paul Niggli (mineralogista 1888- 1953) en el año 1926.

2.- Simetrías cíclicas y diedrales de Leonardo, corresponden a figuras finitas que no tienen simetrías por traslación: También denominados grupos de simetrías puntuales de Leonardo, por la incorporación de estos conceptos en el diseño de las capillas en que participó. La estructura algebraica asociada a estas transformaciones dio origen a dos familias, la cíclica o C_n y la diedral o D_n, caracterizadas por tener un punto fijo O en el plano, denominado centro de simetría, que para los grupos C_n incorpora transformaciones generadas por rotaciones de ángulos de 2p/n = 360/n en torno al punto O. Mientras que para los grupos D_n se incorporan simetrías axiales que pasan por O, además de las rotaciones. Estos tipos de simetría se observan en rosetones ornamentales o para iluminar el interior de catedrales góticas.

Al motivo base de un rosetón se le llama pétalo, y el número de pétalos indica el orden, distinguiéndose un rosetón diedral si el pétalo es simétrico y si no lo es un rosetón cíclico.

3.- Recubrimientos en el plano o mosaicos que presentan simetrías por traslación en dos direcciones diferentes: Diseños destinados a cubrir totalmente el plano sin dejar espacio entre figuras. Los polígonos regulares que teselan un plano son triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos que pueden transformarse y dejar de ser regulares conservando el principio de recubrir el plano sin dejar huecos. Existen muchos ejemplos en suelos y fachadas que incorporan recubrimientos mediante una figura que se repite y distribuye siguiendo una pauta regular o patrón siendo los más famosos los que se observan en La Alhambra de Granada, fuente de inspiración para M.C. Escher, que desarrolló una gran producción artística, consiguiendo diseños sorprendentes y definiendo distintos principios que incorporan traslaciones, rotaciones, reflexiones y deslizamientos para recubrir el plano. Relación arte y matemática que se construye a partir de baldosas en forma de figuras humanas o diversos y extraños animales que se generan modificando un polígono inicial que tesela el plano mediante el método de áreas compensadas.

4.- Simetrías rotatorias con dilatación son aquellas que consideran las transformaciones rotación y homotecia con un mismo centro: Su construcción se genera a partir de un deltoide, al cual se le aplica la transformación homotecia en torno a un punto centro O y razón n/m, procedimiento que se repite hasta las cercanías de O, para luego realizar la rotación en torno a O en un ángulo de 2p/n = 360/n. En este caso, se observa que el teselado definido disminuye infinitamente a medida que se acerca al punto centro, representando el concepto profundidad o que aumenta exponencialmente a medida que se aleja. Construcción geométrica observable en distintas obras artísticas como en el grabado de la plaza del Capitolio (Campidoglio) en Roma propuesta por Miguel Ángel o en el trabajo del artista M.C. Escher quien utilizó la simetría rotatoria con homotecia, incorporando patrones que generan recubrimientos en el plano donde es posible observar el concepto de profundidad o infinito.

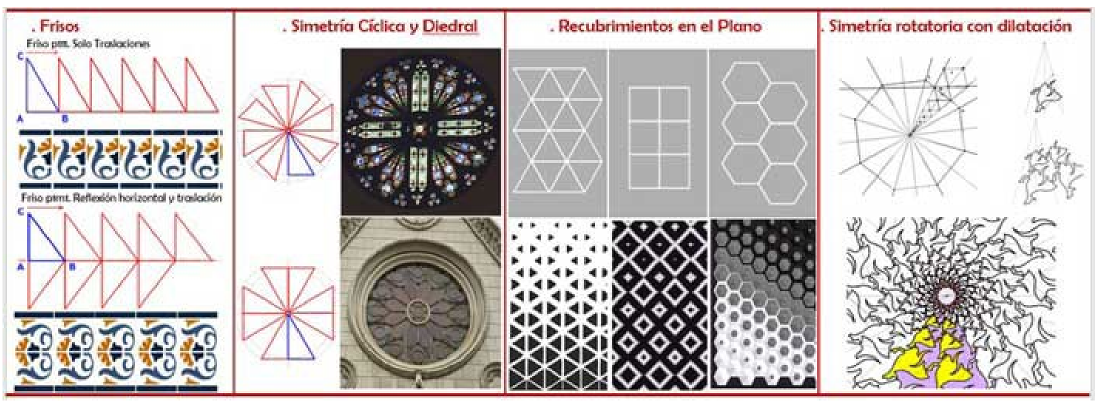

Figura 1. Simetría Aplicada Frisos, Simetría cíclica y diedral, Recubrimientos y Simetría rotatoria con dilatación. Elaboración propia.

Objetivos y métodos

El estudio presenta un enfoque constructivista del tipo cualitativo que considera la indagación, acción y reflexión como principales elementos de la enseñanza y el aprendizaje el que estuvo destinado a analizar la relación geometría y arte desde una visión interdisciplinaria, que asocia los conceptos geométricos que entregan las transformaciones isométricas e isomorfas en el arte y su representación, reconociendo su estructura geométrica. Propuesta didáctica que tiene como eje principal la reflexión y el desarrollo creativo aplicado, para que el estudiante obtenga un aprendizaje significativo que les permita observar la estrecha relación que existe entre geometría y arte, demostrando su significancia y redescubriendo que lo abstracto presenta aplicaciones concretas en el mundo sensible, lo que es posible de constatar a través de aplicaciones del patrimonio cultural artístico, fuente de estudio para el desarrollo de las capacidades geométricas en distintas obras de arte.

Lo que según la concepción de Calvache, Pantoja y Hernández (2015) es necesario para que:

> El estudiante aprenda haciendo su propio aprendizaje, exigiendo un conocimiento como acción transformadora, para de esta manera, hacer referencia a la producción del conocimiento, evitando un conocimiento mecánico, permitiendo un saber contextualizado; sobre todo, una continua deconstrucción y reconstrucción del mismo, que desde una mirada interdisciplinaria conlleve al análisis y resolución de problemas de diferente índole subjetivos e intersubjetivos. (p. 106)

La metodología consistió en un análisis teórico práctico, cuyo objetivo fue entender y articular las relaciones existentes entre arte y geometría, resolviéndose a través de casos de estudio que incluyeron análisis y elaboración de frisos, simetrías cíclicas y diedrales de Leonardo, recubrimientos de Escher y simetrías rotatorias con dilatación. Todos ellos fueron estudiados desde la construcción de las simetrías.

Resultados

La base teórica se focalizó en las transformaciones geométricas en el plano, cuyo significado en matemáticas es “correspondencia entre elementos de dos conjuntos”. Para Clemmens, O’Daffer y Cooney (1998) y Lehmann (1989) la palabra transformación significa el cambio de un objeto que está sujeto a una ley que rige dicho cambio, que indica o describe como se modifica el objeto. A la figura resultante se le denomina homóloga. Dependiendo de la forma que asuma el objeto homologado la transformación es una isometría o movimiento rígido si la forma inicial y final son congruentes, es una transformación isomorfa si la forma inicial y final son semejantes, o es una transformación anamórfica si la forma final es distinta a la inicial (Rodríguez, 2010). De acuerdo con esta definición el estudio se basó en transformaciones isométricas que presentan igualdad de formas e isomorfa con formas semejantes mediante la transformación homotecia.

Los resultados obtenidos fueron consecuencia de los casos analizados, realizados mediante el estudio geométrico de una expresión artística bajo el concepto de transformaciones isométricas en los tres primeros casos y de las transformaciones isomorfas en el último, como se indican a continuación:

1.- La primera actividad realizada consistió en analizar una expresión artística ornamental como son los frisos en fachadas de edificios, estableciendo la tipología de la banda y las transformaciones que comprende, acompañado de una actividad práctica que fue la construcción de un friso que debía realizar cada alumno, para lo cual debía definir un motivo base para luego desarrollar una banda con alguna de las siete estructuras ya definidas.

Figura 2. Frisos de Edificio Edwards – Trabajo de alumnos. Elaboración propia

En la figura 2 se presenta el resultado de una parte del trabajo realizado que muestra como expresión artística dos bandas ornamentales del Edificio Edwards ubicado en la ciudad de Santiago, donde es posible distinguir la estructura geométrica que subyace en ellos. El friso 1 es una mezcla de p112, giros en 180° con traslaciones y pm11 reflexiones verticales con traslaciones, el friso 2 corresponde a la estructura pm11 reflexiones verticales con traslaciones.

En lo que dice relación con el trabajo de aplicación se observan dos diseños de frisos elaborados por los alumnos, cuyo motivo de repetición fue generado mediante el producto de transformaciones sobre un polígono regular, y partir de dicho módulo se elaboró una banda. En el primero de los ejemplos se observa la estructura pm11 y en el segundo caso la estructura p112, que también podría interpretarse como reflexiones verticales y giros en 180°. En todo caso es preciso indicar que el diseño de las bandas o frisos obtenidos dependen de la definición de las transformaciones involucradas, luego es posible obtener infinitos diseños con un mismo módulo base y con una misma estructura geométrica.

2.- La segunda aplicación consideró las simetrías cíclicas y diedrales mediante un procedimiento similar al realizado anteriormente, las expresiones artísticas fueron los rosetones presentes en las fachadas de iglesias Santa María, Basílica del Perpetuo Socorro, La Merced y la Capilla La Caridad localizadas en la ciudad de Santiago, las aplicaciones realizadas por los alumnos recogieron los conceptos de estos tipos de transformaciones y las aplicaron en su propuesta de simetría rotacional y diedral a partir de un motivo inicial generado mediante un producto de transformaciones aplicado a un triángulo.

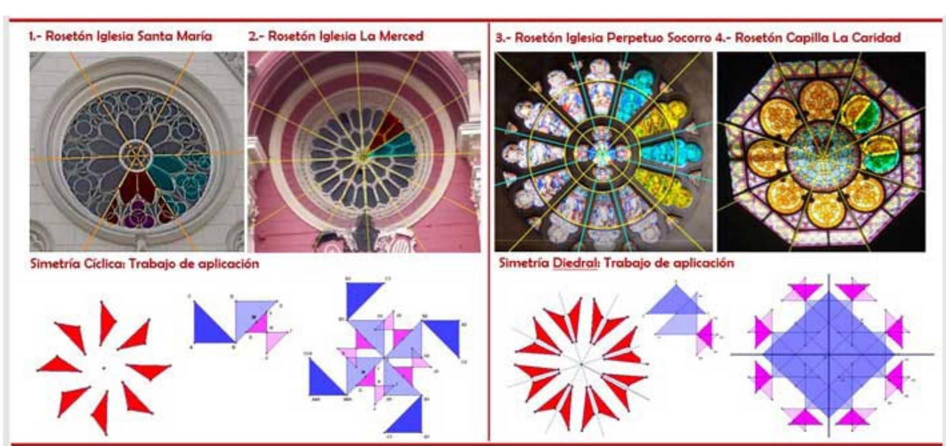

Figura 3. Rosetones con simetría cíclica y diedral – Trabajo de alumnos. Elaboración propia.

En la figura 3 se observan dos rosetones con simetría cíclica y dos rosetones con simetría diedral sobre el acceso de los templos, atribuyéndoles un rol protector por su ubicación. La roseta ornamental de la iglesia Santa María presenta simetría cíclica cuyo giro es en 60°, luego su grupo de simetría es C_6, en el caso de la Iglesia La Merced es una simetría cíclica con giro en 30°, luego su grupo es C_{12}. La región mínima de un grupo cíclico C_n es un sector del plano delimitado por dos semirrectas que pasan por un punto centro formando un ángulo de 360°/n, cómo enseñan las imágenes. Los siguientes dos casos corresponden a rosetones de la Basílica del Perpetuo Socorro y la Capilla La Caridad, en ambos se presenta simetría diedral, con 2n isometrías de las cuales n son reflexiones y n son giros. Para la Basílica n es igual a 6, o grupo diedral D_6, y corresponde al grupo de isometrías del hexágono, conformado por seis reflexiones y seis giros, y para la capilla n es igual a 8, o grupo diedral D_8, y corresponde al grupo de isometrías del octógono, definido por ocho reflexiones y ocho giros. La aplicación de las simetrías de Leonardo enseña una simetría cíclica perteneciente al grupo C_4 con 4 giros de 90° y la simetría diedral por el grupo D_4 con 4 reflexiones y 4 giros de 90°.

3.- La tercera aplicación correspondió a los recubrimientos en el plano, donde se consideró la construcción de un teselado basándose en los cinco principios planteados por Escher, que se construyen modificando un polígono inicial que tesela el plano a través del método de áreas compensadas, de manera que la figura transformada mantenga el área de la original y mediante la combinación de movimientos en el plano como traslaciones, rotaciones, simetrías o simetrías con desplazamiento aplicados en la tesela creada recubren el plano. Bajo estos criterios se aplicaran los siguientes cinco principios de Escher conocidos como: el mosaico P1 que resulta de aplicar recortes y traslaciones en un paralelogramo o hexágono con lados opuestos paralelos, el Mosaico P2 que resulta de realizar giros en 180° en los puntos medios de triángulos o cuadriláteros, el Mosaico P3 aplicado en polígonos que presentan ángulos de 60° o 120° considerando recorte en un lado del polígono girando en torno a un vértice común, dichos vértices de giro no pueden ser consecutivos, el Mosaico P4 aplicado a polígonos con ángulos de 90°, donde el recorte de un lado se gira añadiéndolo al otro lado del vértice común de giro, con centros no consecutivos y el Mosaico P5 que resulta de tramas en base a paralelogramos construidos mediante simetrías verticales y horizontales con deslizamientos. La aplicación consistió en construir un mosaico, asignando un principio por alumno.

En la figura 4 se observa cada uno de los cinco principios de Escher acompañado de un trabajo de aplicación. En cada una de las aplicaciones realizadas se indica la forma poligonal teselada, el principio que define el módulo de encaje con su diseño interior y el recubrimiento. Para realizar el recubrimiento con los distintos principios se aplicaron distintas transformaciones, en el caso de P1 se utilizaron traslaciones horizontales y verticales, para P2 se realizaron giros en 180° en los puntos medios del módulo de encaje, para P3 se utilizaron giros en 120° y traslaciones, para P4 se requirieron giros en 90° en los vértices de giro del módulo de repetición y para el principio P5 simetría verticales y horizontales con desplazamiento.

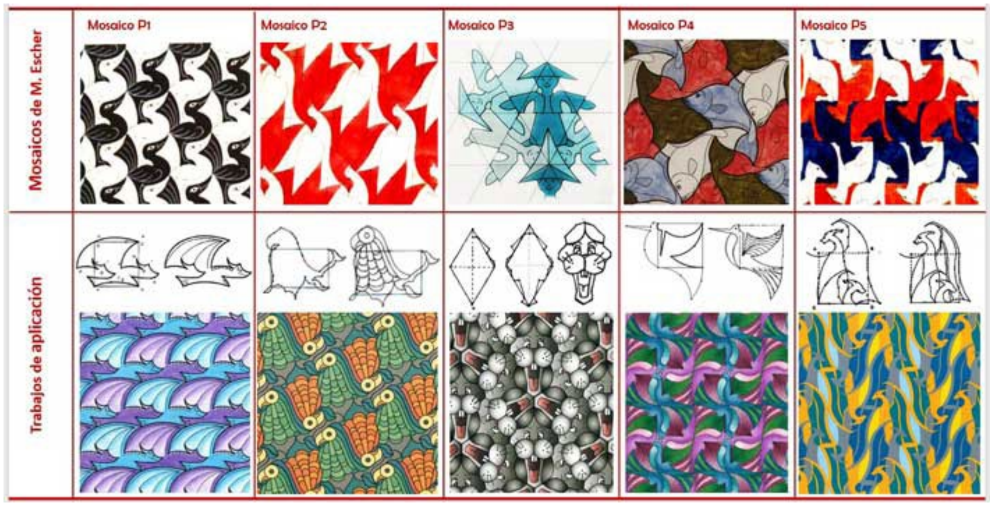

Figura 4. Mosaicos de Escher. Trabajos de aplicación Mosaicos P1, P2, P3, P4 y P5. Elaboración propia

4.- Para la cuarta y última aplicación planteada se trabajó con simetrías rotatoria con dilatación. En este caso se explicó el orden de los pasos a desarrollar para construir una simetría rotatoria con dilatación, posteriormente se enseñó la aplicación del principio en la obra Circular Fish del artista Escher, Fuente: https://www.wikiart.org/es/m-c-escher desarrollada e intervenida por los autores y finalmente basado en los contenidos entregados los alumnos construyeron una simetría rotatoria con dilatación utilizando el principio P2 de Escher.

En la figura 5 se observa la construcción de la obra de Escher “Circular Fish”, y a través de la secuencia de imágenes como se define la tesela de orden cuatro basada en peces que se entrelazan en distintos sentidos generando un ensamble de piezas con simetrías y asimetrías, que dan origen a un patrón basado en una estructura definida por dos ejes que se cortan en 90° constituyendo el centro y ángulo de giro de la simetría rotatoria con dilatación, cuyo elemento de repetición disminuye al acercarse al centro y aumenta al alejarse de él, definiendo una transformación isomorfa.

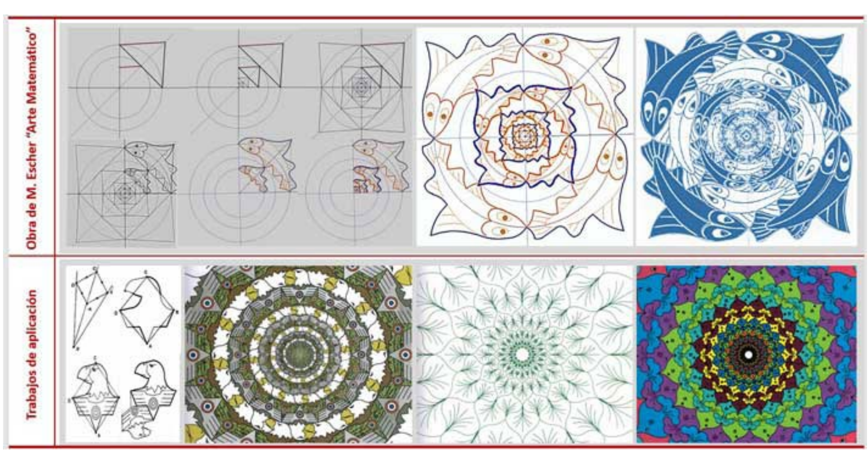

Figura 5. Estructura de obra Circular Fish de Escher y Ejemplos trabajo de alumnos. Elaboración propia

En el trabajo de aplicación se enseñan tres ejemplos, especificando los pasos necesarios para construir una simetría rotatoria con dilatación. Lo primero es definir una tesela de encaje perfecto sobre la cual se aplica respecto del centro la transformación homotecia indefinidamente, posteriormente se rota con un ángulo previamente definido que corresponde a un orden determinado que permita cubrir 360°. La secuencia de imágenes muestra la construcción de una figura o fragmento inscrito en un deltoide de orden doce en el primer y tercer ejemplo, definido por un ángulo de rotación de 30° y de orden diez y seis dado por un ángulo de 22,5° en el segundo ejemplo, generando una simetría rotacional con dilatación, que enseña una representación gráfica particular, organizada concéntricamente con simetría cíclica, y que cuenta con un centro geométrico que corresponde al centro del dibujo que otorga orden y estructura, características propias de la matemática y de la geometría.

Las actividades y resultados obtenidos enseñan que posibilitar el conocimiento de distintas expresiones artísticas y relacionarlas con la geometría facilita el aprendizaje de las transformaciones isométricas e isomorfas y la resolución de las actividades propuestas aportó en la construcción de ejercicios artísticos con contenidos matemáticos, donde la visualización favoreció la construcción y desarrollo de las actividades propuestas, permitiendo comprender el proceso que vincula y relaciona imágenes de expresiones artísticas con sus respectivas soluciones geométricas y viceversa.

Conclusiones

Fue posible observar que la relación arte y geometría en las distintas actividades propuestas tuvieron buena acogida por parte de los alumnos, generando una experiencia amena que les permitió visualizar el vínculo e incentivar el desarrollo de sus capacidades analíticas y creativas

La incorporación del *software* de geometría dinámica *Sketchpad* permitió que los alumnos trabajaran de manera experimental, interactuando con conceptos geométricos e investigando propiedades y relaciones. La herramienta facilitó la ejemplificación, visualización y validación de los elementos geométricos en la construcción de las formas y los resultados obtenidos, y la visualización de representaciones gráficas facilitaron la exploración geométrica relativa a la simulación e intervención en los procesos.

La comprensión de reglas y operaciones matemáticas para explorar la relación técnica con la obra del artista hizo visible todo aquello observable. En los casos revisados el artista al expresarse manifiesta un saber a través de un lenguaje estructurado, donde la gramática gráfica se basa en principios y técnicas que aporta la geometría, teoría y normas de dibujo.

La experiencia descrita constituye una aproximación al estudio de la geometría desde una perspectiva que se diferencia del enfoque tradicional, dado que, en todas las culturas es posible observar representaciones artísticas que adoptan la forma de figuras geométricas explicando la relación intrínseca que existe entre arte y técnica, luego la idea de vincular el estudio de la geometría con el arte permite incentivar en los estudiantes la búsqueda y el interés por temáticas que pudiendo ser abstractas tiene un corolario gráfico. En este contexto y utilizando la obra de Escher se instaló la posibilidad de crear arte utilizando conceptos matemáticos que fundamentan la geometría.

Adicionalmente, he de indicar que las nuevas tecnologías también resultaron ser un instrumento poderoso que cambia la relación de los estudiantes con el conocimiento al acercar a través de la simulación la visualización de propuestas permitiendo anticipadamente revisar resultados e incorporar las modificaciones necesarias, además de replantear soluciones que satisfagan las intenciones perseguidas.

Referencias

Calvache, O., Pantoja, D., Hernández I. (2015, Julio). Naturaleza de la Investigación Cualitativa y su Implicación en el Campo Educativo. *Revista Universitaria: Docencia, investigación e innovación, 3* (2), 101-113.

Clemens, S., O' Daffer, P., Cooney, T. (1998). *Geometría*. México, D. F: Addison Wesley Logman.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. NEW ICMI STUDIES SERIES, (5), 37-51.

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica*. México, D. F: Limusa.

Moreno, L. (2002a). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.). Proyecto de incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. Memorias de seminario Nacional. Bogotá, Colombia: Enlace Editores.

Pando, F. S. A. (2009). *El extraño mundo de las teselaciones. Un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato*. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM. México. Recuperado de: http://132.248.9.195/ptd2009/junio/0644147/0644147.pdf

Rodríguez, M. (2010). *Generación de teselaciones periódicas: Grupos Cristalográficos.* Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid.

Mirtha Pallarés Torres. Doctor en Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid, España. Máster en Diseño y Arquitectura Interior. Universidad Politécnica de Madrid, España. Arquitecto, Universidad de Chile. Académico en la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Universidad de Chile. Realiza actividad docente, de investigación, de extensión y divulgación. Coordinadora Académica del Programa de Postgrado Diploma de Postítulo en Arquitectura Interior.

Jing Chang Lou. Máster en Dirección de Empresas Constructoras e Inmobiliarias, Universidad Politécnica de Madrid, España. Arquitecto, Universidad de Chile. Académico en la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Universidad de Chile. Realiza actividad docente, de investigación, extensión y divulgación.

María Eugenia Pallarés Torres. Doctor en Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid, España. Máster en Dirección de Empresas Constructoras e Inmobiliarias, Universidad Politécnica de Madrid, España. Postítulo de Especialización en Evaluación de Proyectos, Universidad de Chile. Arquitecto, Universidad de Chile. Académico en la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Universidad de Chile. Realiza actividad docente, de investigación, extensión y divulgación. Coordinadora Académica del Programa de Postgrado Diploma de Postítulo de Evaluación y Preparación de Proyectos Inmobiliarios.